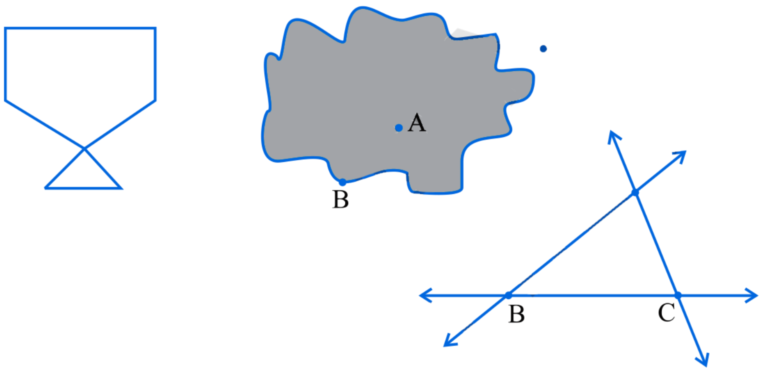
क्षेत्रमितिः

अध्यायः 10

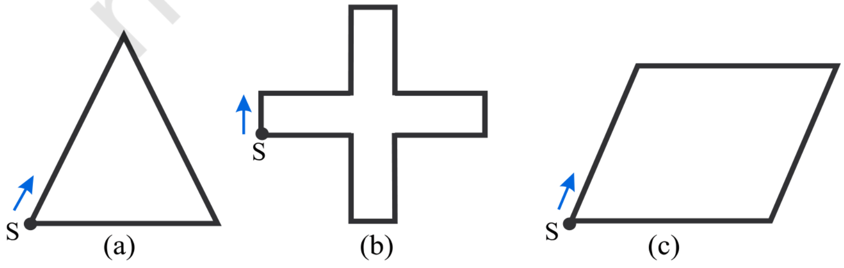
10.1 भूमिका

यदा वयं तलस्य अधोदत्तानां एतादृशाकाराणां विषये सम्भाषणं कुर्मः, तदा वयं तेषाम् आकाराणां क्षेत्रस्य अथवा परिसीमायाः विषये अपि विचारं कुर्मः। अस्माकं कृते एतेषाम् आकाराणां तुलनार्थं केषाञ्चित् मापानाम् आवश्यकता भवति। आयान्तु, वयं तादृशान् एव काञ्चन आकारान् पश्यामः।



10.2 परिमापः

आयान्तु, 10.1 इति अधोदत्ताकृतिं पश्यामः। भवन्तः एकया तन्त्र्या अथवा तन्तुना अपि एताः आकृतयः निर्मातुं शक्नुवन्ति।



आकृति 10.1

यदि भवन्तः S बिन्दुना प्रारम्भं कृत्वा रेखाखण्डानां सहैव चलन्ति तर्हि पुनः भवन्तः S बिन्दुं प्राप्नुवन्ति। अनेन प्रकारेण भवन्तः आकृतेः एकं सम्पूर्णं भ्रमणं कृतवन्तः। एतद्दूरं एतासाम् आकृतीनां निर्माणे प्रयुक्त-तन्त्र्याः दीर्घतया समानम् अस्ति।

एतद्दूरं पिहित-आकृतीनां परिमापः इत्युच्यते। एवमपि वक्तुं शक्यते यत् एतासाम् आकृतीनां निर्माणे प्रयुक्त-तन्त्र्याः दीर्घता एव परिमापः अस्ति।

- एकः कृषिकः स्व-क्षेत्रं परितः अवरोधकं निर्मातुम् इच्छति।
- एकः अभियान्त्रिकः स्व-गृहं परितः अवरोधकभित्तिं निर्मातुं इच्छति।
- एकः जनः क्रीडां क्रीडितुं एकस्य पथः निर्माणं करोति।

एते सर्वेऽपि परिमापस्य प्रयोगं कुर्वन्ति।

एतादृश-पञ्च-स्थितीनाम् उदाहरणं ददतु यत्र भवद्भिः परिमापज्ञानस्य आवश्यकता अनुभूयते।

अतः परिमापः एतादृश-दूरम् अस्ति यत् यदि भवन्तः आकृतिं परितः एकं सम्पूर्णं भ्रमणं कुर्वन्ति तर्हि तत् रेखाखण्डेन सहैव गत्वा एकं पिहिताम् आकृतिं निर्माति।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

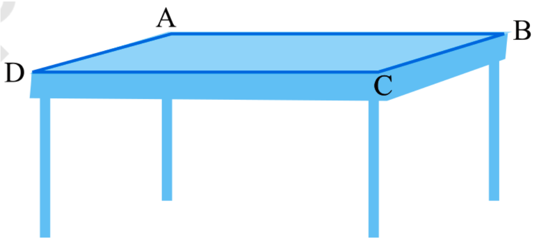
1. स्व-अध्ययन-उत्पीठिकायाः चतुर्णां शीर्षाणां दीर्घतायाः मापनं कुर्वन्तु।

AB = ________ सेमी

BC = ________ सेमी

CD = ________ सेमी

DA = ________ सेमी



अधुना चतुर्णां भुजानां दीर्घतानां योगफलम्

= AB + BC + CD + DA

= _____ सेमी + _____ सेमी + _______ सेमी + _______ सेमी

= _______ सेमी

किं भवन्तः वक्तुं शक्नुवन्ति यत् परिमापः कियान् अस्ति इति ?

2. स्व-टिप्पणी-पुस्तकस्य एकस्य पृष्ठस्य चतुर्णां भुजानां दीर्घतानां मापं कुर्वन्तु अपि च तान् लिखन्तु। चतुर्णां भुजानां दीर्घतानां योगफलं

= AB + BC + CD + DA = ____ सेमी + ____ सेमी + ____ सेमी + ____ सेमी

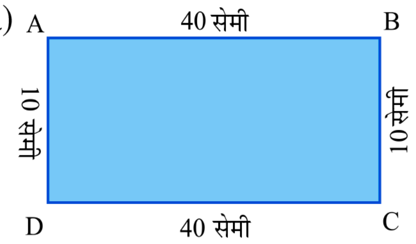
= _______ सेमी

पृष्ठस्य परिमापः कियान् अस्ति ?

3. मीरा 150 मी दीर्घतायाः तथा 80 मी वैशाल्यस्य एकम् उद्यानं गच्छति। सा तस्य उद्यानस्य सम्पूर्णं भ्रमणं करोति। तया भ्रमितं सम्पूर्णं दूरं मापयन्तु।

4. अधोदत्ताकृतीनां परिमापं जानन्तु।

(a)

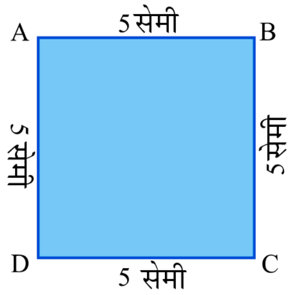


परिमाप = AB + BC + CD + DA

= ___+___+___+___

= ______

(b)

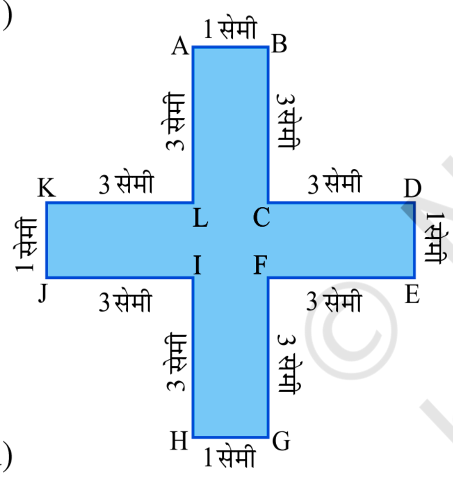


परिमाप = AB + BC + CD + DA

= ___+___+___+___

= ______

(c)



परिमाप = AB + BC + CD + DE + EF + FG + GH + HI + IJ + JK + KL + LA

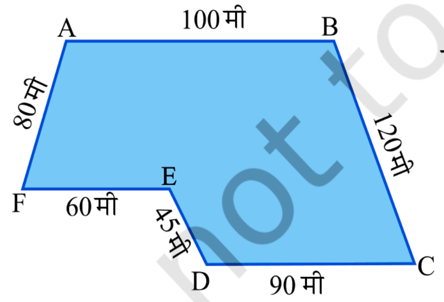
= ___+___+___+___

= ___+___+___+___

= ___+___+___+___

= ______

(d)



परिमाप = AB + BC + CD + DE + EF + FA

= ___+___+___+___+ ___

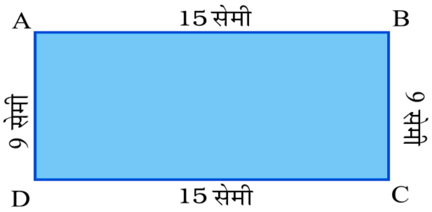
= ______

© NCERT not to be republished

इत्थं, भवन्तः रेखाखण्डैः निर्मितानां पिहिताकृतीनां परिमापं कथं निष्कासयन्ति ? साधारणतया सर्वेषां भुजानां दीर्घतानां योगफलं ज्ञात्वा परिमापं जानीमः।

10.2.1 आयतस्य परिमापः

आयान्तु, इदानीं वयम् एकस्य ABCD इति आयतस्य (आकृतिः 10.2)उपरि विचारं कुर्मः। अस्य दीर्घता = 15 सेमी अपि च वैशाल्यम् = 9 सेमी अस्ति। आयतस्य परिमापः कः भवति ?



आकृति 10.2

आयतस्य परिमापः = चतुर्णां भुजानां दीर्घतानां योगफलम्

= AB + BC + CD + DA

= AB + BC + AB + BC

= 2 X AB + 2 X BC

= 2 X (15 सेमी + 9 सेमी)

= 2 X (24 सेमी)

= 48 सेमी

अतः उपरि दत्त-उदाहरणे वयं दृष्टवन्तः यत्

आयतस्य परिमापः = दीर्घता + वैशाल्यम् + दीर्घता + वैशाल्यम्

अर्थात् आयतस्य परिमापः = 2 X (दीर्घता + वैशाल्यम्)

प्रयत्नं कुर्वन्तु

अधोलिखितायतानां परिमापं जानन्तु।

आयतस्य दीर्घता	आयतस्य वैशाल्यम्	सर्वेषां भुजानां दीर्घतानां योगद्वारा परिमापः	परिमापसूत्रद्वारा 2 X (दीर्घता + वैशाल्यम्)
25 सेमी	12 सेमी	= 25 सेमी + 12 सेमी + 25 सेमी + 12 सेमी = 74 सेमी	= 2 X(25 सेमी +12सेमी) = 2 X (37 सेमी) = 74 सेमी
0.5 मी	0.25 मी		
18 सेमी	15 सेमी		
10.5 सेमी	8.5 सेमी		

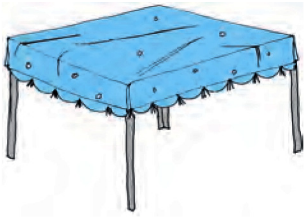
आयान्तु, अधुना वयं प्रयोगात्मकरूपेण अस्य विषयान् पश्यामः।

उदाहरणम् 1 : शबाना 3 मी दीर्घतायाः अपि च 2 मी वैशाल्यस्य एकस्याः आयताकार-उत्पीठिकायाः आवारकं परितः (आकृतिः 10.3)प्रान्ताभरणं योजयितुम् इच्छति। शबानायै कियतः दीर्घतायाः प्रान्ताभरणस्य आवश्यकता अस्ति ?

समाधानम् : आयताकार-उत्पीठिका-आवारकस्य दीर्घता = 3 मी

आयताकार-उत्पीठिका-आवारकस्य वैशाल्यम् = 2 मी

शबाना आवारकं परितः प्रान्ताभरणं योजयितुम् इच्छति अतः तत् आवारकस्य परिमापेन समानं भवति। अधुना आयताकार-उत्पीठिकायाः आवारकस्य परिमापः



आकृति 10.3

= 2 X (दीर्घता + वैशाल्यम्)

= 2 X (3 मी + 2 मी)

= 2 X 5 मी = 10 मी

अतः आवश्यकप्रान्ताभरणस्य दीर्घता = 10 मी अस्ति।

उदाहरणम् 2 : एक धावकः 50 मी दीर्घतायाः अपि च 25 मी वैशाल्यस्य एकम् आयताकारम् उद्यानं परितः 10 वारं भ्रमणं करोति। तेन परिक्रमितम् आहत्य दूरं जानन्तु।

समाधानम् : आयताकार-उद्यानस्य दीर्घता = 50 मी

आयताकार-उद्यानस्य वैशाल्यम् = 25 मी

धावकेन परिक्रमित आहत्य दूरम् उद्यानस्य परिमापेन समानं भवति।

अधुना, आयताकार-उद्यानस्य परिमापः

= 2 X (दीर्घता + वैशाल्यम्)

= 2 X (50 मी + 25 मी)

= 2 X 75 मी = 150 मी

धावकेन 1 भ्रमणे परिक्रमितदूरं 150 मी अस्ति।

अतः 10 भ्रमणेषु परिक्रमितदूरं 10 X 150 मी = 1500 मी

अतः धावकेन परिभ्रमितम् आहत्य दूरम् 1500 मी अस्ति।

उदाहरणम् 3 : एकस्य आयतस्य परिमापं जानन्तु यस्य दीर्घता = 150 सेमी तथा वैशाल्यं = 1 मी अस्ति।

समाधानम् : आयतस्य दीर्घता = 150 सेमी

आयतस्य वैशाल्यम् = 1 मी

= 100 सेमी

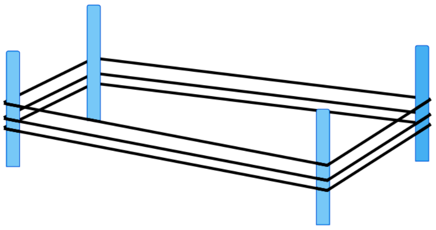
आयतस्य परिमापः

= 2 X (दीर्घता + वैशाल्यम्)

= 2 X (150 सेमी + 100 सेमी)

= 2 X (250 सेमी) = 500 सेमी = 5 मी

उदाहरणम् 4 : एकस्य कृषकस्य आयताकार-कृषिक्षेत्रस्य दीर्घता अपि च वैशाल्यं क्रमशः 240 मी अपि च 180 मी अस्ति । सः क्षेत्रं परितः रज्जुना 3 सम्पूर्णभ्रमणस्य अवरोधकं निर्मातुम् इच्छति । यथा आकृतिः 10.4 इत्यत्र दर्शितमस्ति ।



आकृति 10.4

तेन प्रयुक्त-रज्जोः आहत्य दीर्घता जानन्तु ।

समाधानम् : कृषिकेण रज्जुना क्षेत्रस्य परिमापः त्रिगुणितं परिक्रमणीयः वर्तते । आवश्यकरज्जोः दीर्घता क्षेत्रस्य परिमापस्य त्रिगुणितः भवति ।

क्षेत्रस्य परिमापः = 2 X (दीर्घता + वैशाल्यम्)

= 2 X (240 मी + 180 मी)

= 2 X (420 मी) = 840 मी

आवश्यकरज्जोः आहत्य दीर्घता = 3 X 840 मी = 2520 मी

उदाहरणम् 5 : 250 मी दीर्घतायाः अपि च 175 मी वैशाल्यस्य आयताकार-उद्यानं परितः अवरोधकनिर्माणे आहत्य कियान् व्ययः भवति इति 12 रू प्रति मीटर् इति प्रमाणं स्वीकृत्य जानन्तु ।

समाधानम् : आयताकार-उद्यानस्य दीर्घता = 250 मी

आयताकार-उद्यानस्य वैशाल्यम् = 175 मी

अवरोधकनिर्माणे भविष्यमाणव्ययं ज्ञातुम् उद्यानस्य परिमापस्य आवश्यकता भवति ।

आयताकार-उद्यानस्य परिमापः = 2 X (दीर्घता + वैशाल्यम्)

= 2 X (250 मी + 175 मी)

= 2 X (425 मी) = 850 मी

उद्यानं परितः 1 मी. अवरोधकनिर्माणे भविष्यमाणव्ययः = 12 रू

अतः 850 मी. दीर्घतायाः अवरोधकनिर्माणे भविष्यमाणः आहत्य व्ययः

= 12 X 850 रू = 10200 रू

10.2.2 सम-आकृतीनां परिमापः

आयान्तु, इदम् उदाहरणं पश्यामः ।

विश्वामित्रः 1 मी. भुजयुक्तं वर्गाकारचित्रं परितः एकं वर्णपट्टकं (टेप्) योजयितुम् इच्छति, यथा आकृतिः 10.5 इत्यस्मिन् दर्शितम् अस्ति । तस्य कृते कियतः दैर्घ्यस्य वर्णपट्टकस्य आवश्यकता भवति ?

विश्वामित्रः वर्गाकारचित्रं परितः वर्णपट्टकं योजयितुम् इच्छति इत्यतः तेन वर्गाकारचित्रस्य परिमापः ज्ञातव्यः भवति ।

अतः आवश्यकवर्णपट्टकस्य दीर्घता =

वर्गाकारचित्रस्य परिमापः = 1 मी + 1 मी + 1 मी + 1 मी = 4 मी

वयं जानीमः यत् वर्गस्य चतुर्णामपि भुजानां दीर्घता समानः भवति इति । अतः अस्य चतुर्वारं योगकरणस्थाने वयं वर्गस्य एकस्य भुजस्य दीर्घता 4 इत्यनेन गुणनं कर्तुं शक्नुमः । अतः आवश्यकवर्णपट्टकस्य दीर्घता = 4 X 1 मी = 4मी

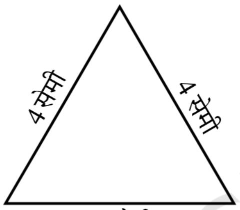
अनेन उदाहरणेन वयं पश्यामः यत्

वर्गस्य परिमापः = 4 X एकस्य भुजस्य दीर्घता

एवमेव इतोऽपि अन्यान् वर्गान् निर्मान्तु अपि च तेषां परिमापं जानन्तु ।

अधुना वयं 4 से.मी. भुजायाः एकं समबाहुत्रिभुजं (आकृतिः 10.6) पश्यामः । किं वयम् अस्य परिमापं ज्ञातुं शक्नुमः ?

अस्य समबाहुत्रिभुजस्य परिमापः = 4 + 4 + 4 सेमी



आकृति 10.6

अस्य समबाहुत्रिभुजस्य परिमापः = (4 + 4 + 4) सेमी
= 3 X 4 सेमी
= 12 सेमी

अनेन प्रकारेण वयं पश्यामः यत्

समबाहुत्रिभुजस्य परिमापः = 3 X एकस्य भुजस्य दीर्घता

किं भवन्तः वक्तुं शक्नुवन्ति यत् एकस्मिन् वर्गे एवम् एकस्मिन् समबाहुत्रिभुजे कः समानगुणः अस्ति ? एतासु आकृतिषु प्रत्येकं भुजस्य दीर्घता समानः अस्ति अपि च प्रत्येकं कोणस्य मापः समानः अस्ति । **एतादृश्यः सर्वाः आकृतयः पिहित-समाकृतयः** इति कथ्यन्ते ।

अतः वर्गाः अपि च समबाहुत्रिभुजाः पिहित-समाकृतयः सन्ति ।

भवन्तः दृष्टवन्तः यत्

एकस्य वर्गस्य परिमापः = 4 X एकस्य भुजस्य दीर्घता

एकस्य समबाहुत्रिभुजस्य परिमापः = 3 X एकस्य भुजस्य दीर्घता

एवमेव एकस्य समपञ्चभुजस्य परिमापः कियान् भवति ?

एकस्मिन् समपञ्चभुजे 5 समानभुजाः भवन्ति ।

अतः एकस्य समपञ्चभुजस्य परिमापः = 5 X एकस्य भुजस्य दीर्घतातथैव एकस्य षड्भुजस्य परिमापः ____________ भवति ।

एकस्य समाष्टभुजस्य परिमापः कियान् भवति ?

प्रयत्नं कुर्वन्तु

आत्मानं परितः विद्यमानानां समाकारयुक्तानां वस्तूनां गवेषणं कुर्वन्तु अपि च तेषां परिमापं जानन्तु ।

उदाहरणम् 6 : शायना 70 मी. वर्गाकारम् उद्यानं परितः 3 भ्रमणं करोति । तया परिक्रमितदूरं जानन्तु ।

समाधानम् : वर्गाकार-उद्यानस्य परिमापः

= 4 X एकस्य भुजस्य दीर्घता

= 4 X 70 मी = 280 मी

एकस्मिन् भ्रमणे परिक्रमितदूरम् = 280 मी

अतः 3 X 280 मी = 840 मी

उदाहरणम् 7 : पिङ्की 75 मीटर् भुजयुक्तम् एकं क्रीडाङ्गणं परितः भ्रमणं करोति । बोबः 160 मी. दीर्घतायाः अपि च 105 मी. वैशाल्यस्य एकम् आयताकारं क्रीडाङ्गणं भ्रमति । द्वयोः मध्ये कः अधिकं दूरं क्रमति अपि च अधिकं कियद्दूरं क्रमति ?

समाधानम् : पिङ्क्या परिक्रमित-आहत्य दूरं = वर्गस्य परिमापः

= 4 X एकस्य भुजस्य दीर्घता

= 4 X 75 मी. = 300 मी

बोबेन परिक्रमित-आहत्य दूरं = आयतस्य परिमापः

= 2 X (दीर्घता + वैशाल्यम्)

= 2 X (160 मी. + 105 मी)

= 2 X 265 मी. = 530 मी

परिक्रमितदूरयोः मध्ये विद्यमानम् अन्तरं = 530 मी – 300 मी. = 230 मी

अतः बोबः अधिकं दूरं परिक्रमति अपि च तद्दूरं 230 मी. अधिकम् अस्ति ।

उदाहरणम् 8 : एकस्य समपञ्चभुजस्य परिमापं जानन्तु यस्य प्रत्येकं भुजस्य दीर्घता 3 से.मी. अस्ति ।

समाधानम् : अस्मिन् समपञ्चभुजे 5 भुजाः सन्ति यस्य प्रत्येकं भुजस्य भुजायाः दीर्घता 3 से.मी. अस्ति । अस्य समपञ्चभुजस्य परिमापः = 5 X 3 सेमी = 15 सेमी

उदाहरणम् 9 : एकस्य समषड्भुजस्य परिमापः 18 से.मी. अस्ति । अस्य एकस्य भुजस्य दीर्घता जानन्तु ।

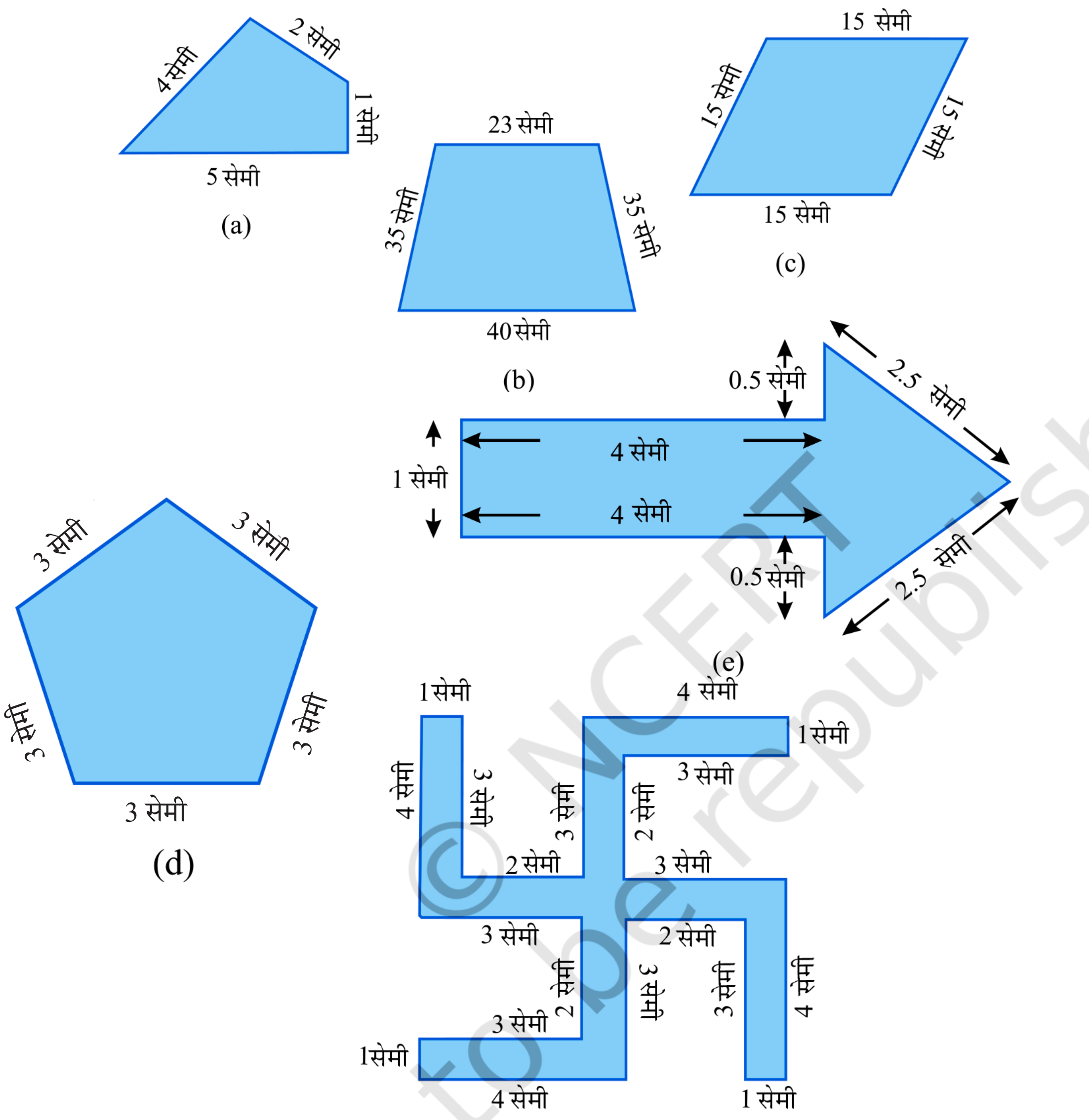
समाधानम् : परिमापः = 18 सेमी

एकस्मिन् समषड्भुजे 6 समानभुजाः भवन्ति । अतः एकस्य भुजस्य दीर्घतां ज्ञातुं वयं परिमापं 6 इत्यनेन भागं कर्तुं शक्नुमः । समषड्भुजस्य एकस्य भुजस्य दीर्घतां = 18 से.मी. ÷ 6 = 3 सेमी । अतः समषड्भुजस्य प्रत्येकं भुजस्य दीर्घतां 3 से.मी. अस्ति ।

अधुना वयम् एतावत्पर्यन्तं प्राप्तविचारेण सम्बन्धितानां केषाञ्चन प्रश्नानां समाधानं कुर्मः ।

अभ्यासः 10.1

1. अधोदत्तानाम् आकृतीनां परिमापं जानन्तु।



© NCERT not to be republished

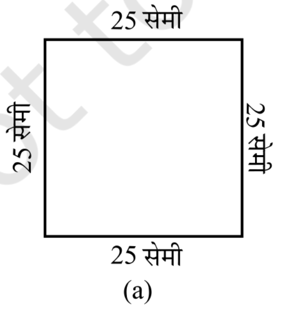
2. 40 से.मी. दीर्घतायाः अपि च 10 से.मी. वैशाल्यस्य एकम् आयताकार-पेटिकावारकं एकेन वर्णपट्टेन (टेप्) पिहितम् अस्ति। आवश्यक-वर्णपट्टस्य दीर्घतां जानन्तु।

3. एकस्याः उत्पीठिकायाः उपरितनस्य तलस्य भुजयोः दीर्घतां अपि च वैशाल्यं क्रमशः 2 मी. 25 से.मी. अपि च 1 मी 50 सेमी अस्ति। उत्पीठिकायाः उपरितनतलस्य परिमापं जानन्तु।

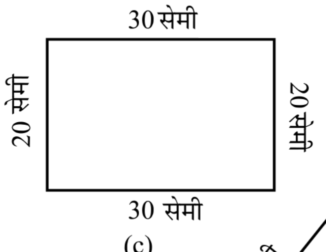
4. 32 से.मी. दीर्घतायाः अपि च 21 सेमी वैशाल्यस्य एकस्य भावचित्रस्य कृते काष्ठस्य प्रान्तभित्तिः (फ्रेम्) निर्मातव्या अस्ति।

5. एकस्य आयताकार-भूखण्डस्य दीर्घता अपि च वैशाल्यं क्रमशः 0.7 किमी अपि च 0.5 किमी अस्ति। भूखण्डं परितः चतृषु चतसृषु पङ्क्तिषु तन्त्र्या अवरोधकः निर्मातव्यः अस्ति। आवश्यकतन्त्र्याः दीर्घतां जानन्तु।

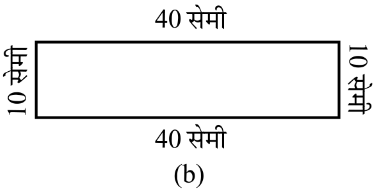
6. अधोदत्ताकृतिषु प्रत्येकं परिमापं जानन्तु ।
   (a) एकः त्रिभुजः यस्य भुजाः क्रमशः 3 सेमी, 4 सेमी अपि च 5 सेमी दीर्घाः सन्ति ।
   (b) एकः समबाहुत्रिभुजः यस्य एकस्य भुजस्य दीर्घता 9 से.मी. अस्ति ।
   (c) एकः समद्विबाहुत्रिभुजः यस्य प्रत्येकं समानभुजस्य दीर्घता 8 से.मी. अपि च तृतीय-भुजस्य दीर्घता 6 से.मी. अस्ति ।
7. एकस्य त्रिभुजस्य परिमापं जानन्तु यस्य भुजानां दीर्घताः 10 सेमी, 14 से.मी. अपि च 15 से.मी. सन्ति ।
8. एकस्य समषड्भुजस्य परिमापं जानन्तु यस्य प्रत्येकं भुजस्य भुजायाः मापः 8 मी. अस्ति ।
9. एकस्य वर्गस्य भुजस्य मापं जानन्तु यस्य परिमापः 20 मी. अस्ति ।
10. एकस्य समपञ्चभुजस्य परिमापः 100 से.मी. अस्ति । प्रत्येकं भुजस्य दीर्घतां जानन्तु ।
11. एकस्य तन्तोः दीर्घता 30 से.मी. अस्ति । प्रत्येकं भुजस्य दीर्घता कियान् भवति यदि तन्तुना निर्मिताः भवन्ति –
   (a) एकः वर्गः ?
   (b) एकः समबाहुत्रिभुजः ?
   (c) एकः समषड्भुजः ?
12. एकस्य त्रिभुजस्य द्वौ भुजौ 12 सेमी अपि च 14 से.मी. स्तः । अस्य त्रिभुजस्य परिमापः 36 सेमी अस्ति । अस्य तृतीयभुजस्य दीर्घता कियान् भवति ?
13. यदि प्रति मीटर् इत्यस्य कृते 20 रू व्ययः भवति चेत् तर्हि 250 मी भुजस्य वर्गाकार-उद्यानं परितः अवरोधकनिर्माणे कियद्धनम् अपेक्षते ?
14. एकस्य आयताकार-उद्यानस्य दीर्घता 175 मी अपि च वैशाल्यं 125 मी अस्ति । प्रति मीटर् इत्यस्य कृते 12 रू व्ययः भवति चेत् उद्यानं परितः अवरोधकनिर्माणे कियान् व्ययः भवति ?
15. स्वीटी 75 मी भुजयुक्तवर्गं परितः धावति तथा बुल्बुल् इत्याख्या 60 मी दीर्घतायाः अपि च 45 मी. वैशाल्यस्य आयताकारं परितः धावति । एतयोः कतरा न्यूनतमदूरं धावति ?
16. अधोदत्ताकृतीनां परिमापं जानन्तु । भवन्तः उत्तरेण कं निष्कर्षं प्राप्नुवन्ति ?



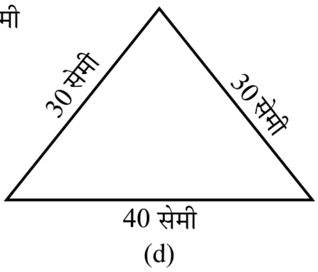
(a)



(c)

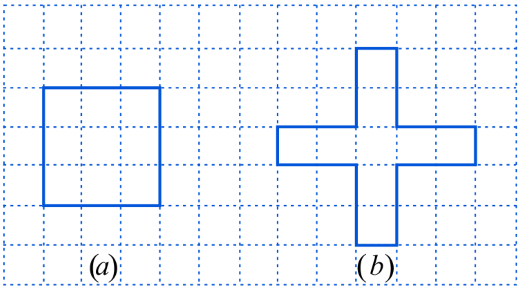


(b)



(d)

17. अवनीतः 9 वर्गाकार-स्निग्धप्रस्तरं (टैल्स्) क्रीणाति यस्य प्रत्येकं भुजः 1/2 मी अस्ति सः एतान् प्रस्तरान् एकस्य वर्गस्य रूपेण स्थापयति।



आकृति 10.7

(a) नूतनवर्गस्य परिमापः कः अस्ति [(आकृतिः 10.7 (a)]?

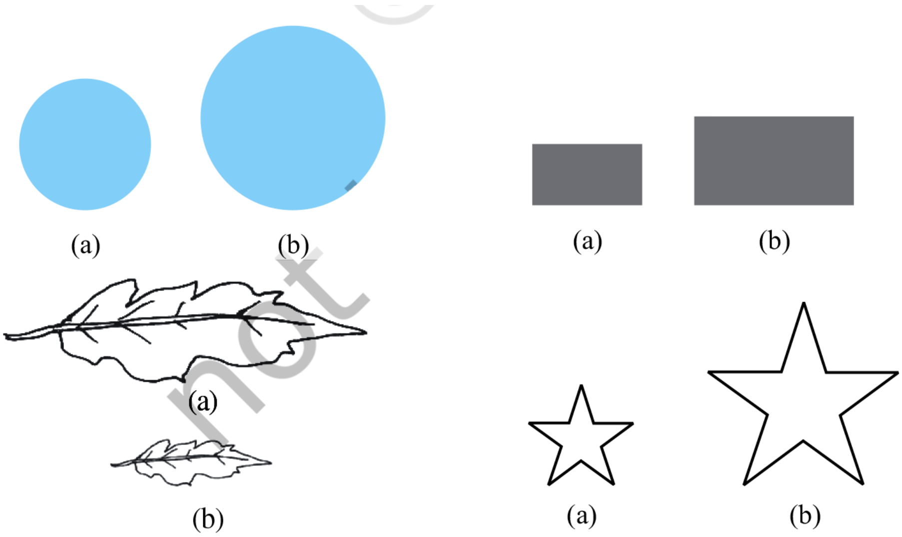
(b) शैर्यै अवनीतद्वारा स्थापित-प्रस्तरस्थापन-शैलिः न रोचते । सा तान् प्रस्तरान् धनचिह्नरूपेण स्थापयति। अस्याः स्थापनव्यवस्थायाः परिमापः कः भवति [(आकृतिः 10.7 (b)]?

(c) कस्याः आकृतेः परिमापः अधिकः अस्ति ?

(d) अवनीतः चिन्तयति किं कश्चन तादृशः विधिः अपि अस्ति येन सर्वाधिकपरिमापस्य प्राप्तिः भवेत् ? किं भवन्तः एतत्कर्तुं कमपि परामर्शं दातुं शक्नुवन्ति ? (प्रस्तराः परस्परं संलग्नाः एव भवेयुः)।

10.3 क्षेत्रफलम्

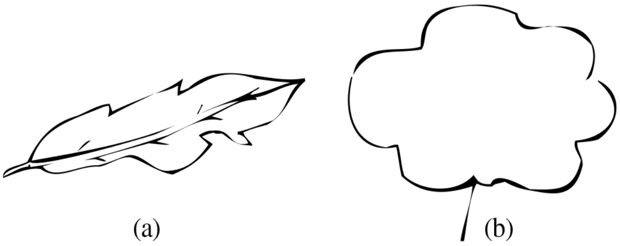
अधोदत्ताः पिहिताकृतयः पिहिताकृतीः पश्यन्तु (आकृतिः 10.8) । एताः सर्वाः आकृतयः तलभागे किञ्चित् क्षेत्रम् आवृण्वन्ति। किं भवन्तः वक्तुं शक्नुवन्ति यत् एतासु कतमा आकृतिः अधिकं क्षेत्रम् आवृणोति ?



आकृति 10.8

पिहित-आकृतिभिः आवृततलस्य परिणामः तस्याः क्षेत्रफलम् इत्युच्यते। अतः किं भवन्तः वक्तुं शक्नुवन्ति यत् उपरि दत्ताकृतिषु कस्याः क्षेत्रफलम् अधिकम् अस्ति ?

अधुना वयं अधोदत्ताकृतयः अधोदत्ताकृतीः पश्यामः (आकृतिः 10.9) । एतासु कस्याः आकृतेः क्षेत्रफलम् अधिकम् अस्ति ? एतासाम् आकृतीनां दर्शनमात्रेण एतत् वक्तुं बहुकष्टम् भवति । अतः भवन्तः किं कुर्वन्ति ?



आकृति 10.9

इमे आकतीः वर्गाङ्कित-कागदस्य उपरि स्थापयन्तु यत्र प्रत्येकं वर्गस्य मापः 1 से.मी. X 1 से.मी. स्यात् ।

एतासां आकृतीनां बाह्य रूपरेखाम् आलिखन्तु । एताभिः आकृतिभिः आवृतवर्गान् पश्यन्तु । भवन्तः द्रक्ष्यन्ति यत् तेषु केचन अर्धवर्गाः केचन पूर्णवर्गाः केचन अर्धात् न्यूनाः केचन अर्धादधिकाः वर्गाः अवृताः सन्ति ।

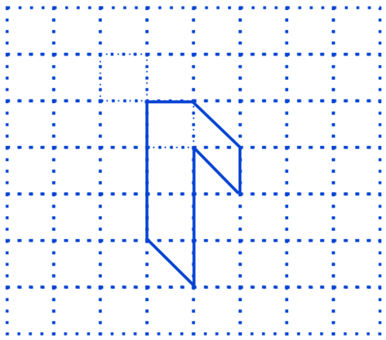
आकृत्या आवृत-वर्गाणां सङ्ख्या एव तस्याः क्षेत्रफलम् अस्ति ।

परन्तु अत्र एका समस्या वर्तते – भवन्तः यस्याः कस्याः अपि अकृतेः क्षेत्रफलं मापयितुम् इच्छन्ति, वर्गः तां सर्वदा पूर्णतया न आच्छादयति । वयं एकेन विधिना इमां समस्यां परिहर्तुं शक्नुमः ।

- वयम् एकस्य पूर्णवर्गस्य क्षेत्रफलम् एकवर्गघटकः इति स्वीकुर्मः । यदि एषः वर्गः 1 वर्ग-से.मी. अस्ति तर्हि एकस्य पूर्णवर्गस्य क्षेत्रफलं 1 वर्ग-से.मी. भवति ।
- येषां वर्गाणाम् अर्धादपि न्यूनभागः आकृत्या आवृतः अस्ति तर्हि तं त्यजन्तु ।
- यदि वर्गस्य अर्धादधिकभागः आकृत्या आवृतः तर्हि तादृश-वर्गान् वयं पूर्णवर्गः इति गणयामः ।
- यदि कस्यापि वर्गस्य अर्धभागं गणनं कर्तुं शक्यते तर्हि तादृशवर्गस्य क्षेत्रफलं $\frac{1}{2}$ वर्गघटकः इति स्वीकुर्मः ।

अनेन विधिना इष्ट-क्षेत्रफलस्य इष्टक्षेत्रफलस्य समुचितं मापनं कर्तुं शक्यते ।

उदाहरणम् 10 : आकृतिः 10.10 इत्यत्र दर्शिताकारस्य क्षेत्रफलं जानन्तु ।



आकृति 10.10

समाधानम् : एषः आकारः रेखाखण्डैः निर्मितः अस्ति । एषः आकारः केवलं पूर्णवर्गैः अपि च अर्धवर्गैः आवृतः अस्ति । एषः अस्माकं कार्यम् इतोऽपि सरलं करोति । कथम् ?

(i) पूर्णावृतवर्गाः = 3

(ii) अर्धावृतवर्गाः = 3

पूर्णावृतवर्गाणां क्षेत्रफलं = 3 X 1 वर्गघटकः = 3 वर्गघटकाः ।

अर्धावृतवर्गाणां क्षेत्रफलं

$= 3 \text{ X } \frac{1}{2}$ वर्गघटकः= $1 \frac{1}{2}$ वर्गघटकः

अतः आहत्य क्षेत्रफलम् $= 4 \frac{1}{2}$ वर्गघटकः ।

उदाहरणम् 11 : वर्गान् गणयित्वा, आकृतिः 10.9 (b) इत्यस्य अनुमानित-क्षेत्रफलं जानन्तु ।

समाधानम् : वर्गाङ्कितकागदे अस्याः अकृत्याः बाह्य-रूपरेखाम् आलिखन्तु । वर्गाः इमाम् आकृतिं कथं आवृण्वन्ति ।

आवृताः वर्गाः	सङ्ख्या	अनुमानि तक्षेत्रफलम्
(i) पूर्णावृतवर्गाः	11	11
(ii) अर्धावृतवर्गाः	3	$3 \text{ X } \frac{1}{2}$
(iii) अर्धादधिकावृतवर्गाः	7	7
(iv) अर्धान्न्यूनावृतवर्गाः	5	0

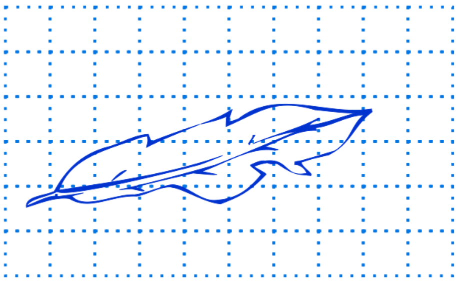
आकृति 10.11

आहत्य क्षेत्रफलम् = $11 + 3 \text{ X } \frac{1}{2} + 7 = 19 \frac{1}{2}$ वर्गघटकाः

उदाहरणम् 12 : वर्गान् गणयित्वा, आकृतिः 10.9 (a) इत्यस्य अनुमानितं क्षेत्रफलं जानन्तु ।

समाधानम् : एकस्मिन् वर्गाङ्कित-कागदे आकृतेः बाह्य-रूपरेखाम् आलिखन्तु । वर्गाः इमाम् आकृतिं कथं आवृण्वन्ति ?

आवृताः वर्गाः	सङ्ख्या	अनुमानित क्षेत्रफलम्
(i) पूर्णावृतवर्गाः	1	11
(ii) अर्धावृतवर्गाः	-	-
(iii) अर्धादधिकावृतवर्गाः	7	7
(iv) अर्धान्न्यूनावृतवर्गाः	9	0



आकृति 10.12

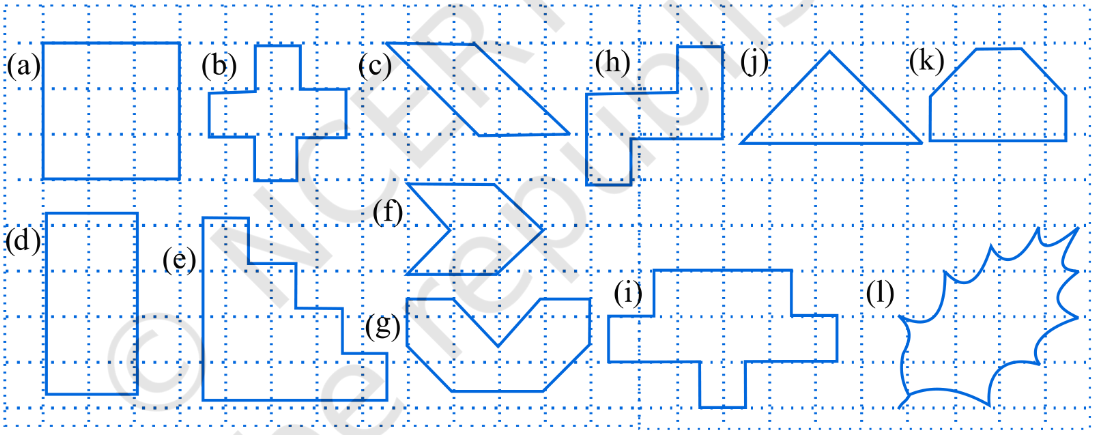
आहत्य क्षेत्रफलम् = 1 + 7 = 8 वर्गघटकाः ।

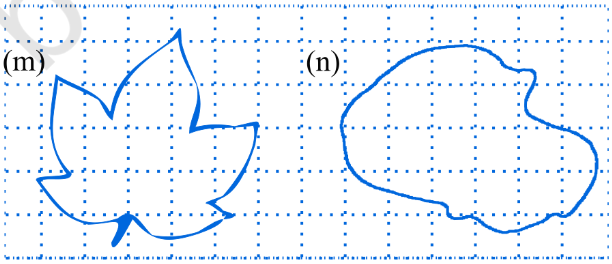
प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. वर्गाङ्कित-कागदे कमपि एकं वृत्तम् आलिखन्तु । अस्मिन् वृत्ते विद्यमानवर्गाणां सङ्ख्यां गणयित्वा वृत्ताकारस्य क्षेत्रस्य अनुमानितं क्षेत्रफलं जानन्तु ।
2. वर्गाङ्कितकागदस्य उपरि पत्राणि, पुष्पदलानि तथा एवमेव अन्यानि वस्तूनि स्थापयित्वा छायाङ्कनं कुर्वन्तु अपि च तेषां क्षेत्रफलं जानन्तु ।

अभ्यासः 10.2

1. अधोलिखिताकृतीनां क्षेत्रफलं जानन्तु ।



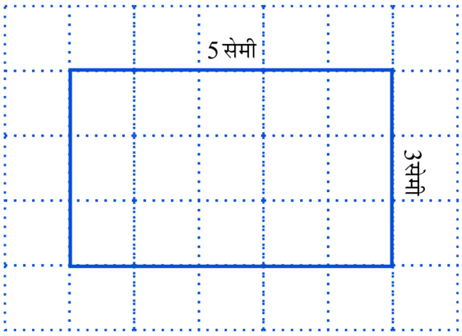


10.3.1 आयतस्य क्षेत्रफलम्

एकस्य वर्गाङ्कित-कागदस्य साहाय्येन किं वयं वक्तुं शक्नुमः यत् एकस्य आयतस्य क्षेत्रफलं कियत् स्यात् ? अस्य दीर्घता 5 से.मी. अपि च वैशाल्यम् 3 से.मी. अस्ति ?

वर्गाङ्कित-कागदस्य तस्य आयतस्य उपरि एकम् आयतं निर्मान्तु (आकृतिः 10.13) । एषः आयतः 15 वर्गान् पूर्णतया आवृणोति ।

आयतस्य क्षेत्रफलम् = 15 वर्गसे.मी. अस्ति । यद्वयं 5 X 3 वर्गसे.मी. (दीर्घता X वैशाल्यम्) इति रूपेण अपि लेखितुं शक्नुमः ।



आकृति 10.13

कतिचन आयतानां मापाः दत्ताः वर्तन्ते। एतान् वर्गाङ्कितकर्गजे स्थापयित्वा तथा वर्गाणां सङ्ख्यां गणयित्वा एतेषां क्षेत्रफलं जानन्तु।

दीर्घता	वैशाल्यम्	क्षेत्रफलम्
3 सेमी	2 सेमी	________
5 सेमी	4 सेमी	________
6 सेमी	5 सेमी	________

अनेन वयं कं निष्कर्षं प्राप्नुमः ?

वयं दृष्टवन्तः यत्

आयतस्य क्षेत्रफलम् = (दीर्घता X वैशाल्यम्)

वर्गाङ्कितकर्गजेन विना किं वयम् आयतस्य क्षेत्रफलं ज्ञातुं शक्नुमः,यस्य दीर्घता 6 सेमी अपि च वैशाल्यं 4 से.मी. अस्ति ?

आम्, अयं सम्भवः अस्ति।

आयतस्य क्षेत्रफलम्

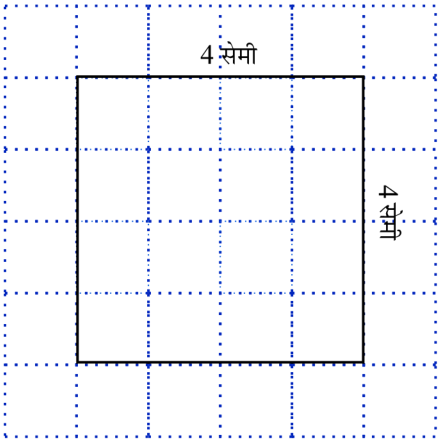
= दीर्घता X वैशाल्यम्

= 6 सेमी X 4 सेमी = 24 वर्गसेमी

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. स्व-कक्ष्यायाः भूम्याः (फर्श) क्षेत्रफलं जानन्तु।
2. स्वगृहस्य कस्यापि एकस्य द्वारस्य क्षेत्रफलं जानन्तु।

10.3.2 वर्गस्य क्षेत्रफलम्



आकृति 10.14

आयान्तु, अधुना वयं वर्गस्य विषये विचारं कुर्मः यस्य भुजस्य दीर्घता 4 से.मी. अस्ति (आकृतिः 10.14)।

अस्य वर्गस्य क्षेत्रफलं कियद्भवेत् ?

यदि वयं अमुं सेण्टी.मीटर् वर्गाङ्कितकागदस्य उपरि स्थापयामः तर्हि वयं किं पश्यामः ?
एषः 16 वर्गान् पूर्णतया आवृणोति ।

अतः वर्गस्य क्षेत्रफलं = 16 वर्गसे.मी.
= 4 X 4 वर्गसे.मी .

केषाञ्चन वर्गाणाम् एकस्य भुजस्य दीर्घता दत्तः अस्ति ।
वर्गाङ्कितकागदस्य साहाय्येन तेषां क्षेत्रफलं जानन्तु ।

एकस्य भुजस्य दीर्घता	वर्गस्य क्षेत्रफलम्
3 सेमी	__________
7 सेमी	__________
5 सेमी	__________

अनेन वयं कं निष्कर्षं प्राप्नुमः ? वयं दृष्टवन्तः यत् प्रत्येकं स्थितिषु
वर्गस्य क्षेत्रफलं = भुजः X भुजः इति अवगच्छामः ।
भवन्तः प्रश्नानां समाधानसमये एकेन सूत्ररूपेण अस्य प्रयोगं कर्तुं शक्नुवन्ति ।

उदाहरणम् 13 : एकस्य आयतस्य क्षेत्रफलं जानन्तु, यस्य दीर्घता 12 सेमी. वैशाल्यं च 4 सेमी. अस्ति ।

समाधानम् : आयतस्य दीर्घता = 12 सेमी.
आयतस्य वैशाल्यम् = 4 सेमी.
आयतस्य क्षेत्रफलम् = दीर्घता x वैशाल्यम्
= 12 सेमी X 4 सेमी. = 48 वर्गसेमी.

उदाहरणम् 14 : एकस्य वर्गाकार-भूखण्डस्य क्षेत्रफलं जानन्तु, यस्य एकः भुजः 8 मी. अस्ति ।

समाधानम् : वर्गस्य भुजः = 8 मी.
वर्गस्य क्षेत्रफलं = भुजः X भुजः
= 8 मी X 8 मी. = 64 वर्गमी.

उदाहरणम् 15 : एकस्य आयताकारस्थूलपत्रस्य क्षेत्रफलं 36 वर्गसेमी तथा अस्य दीर्घता 9 से.मी. अस्ति । स्थूलपत्रस्य वैशाल्यं जानन्तु ।

समाधानम् : आयताकारस्य स्थूलपत्रस्य क्षेत्रफलं = 36 वर्गसेमी
दीर्घता = 9 से.मी.
वैशाल्यं = ?
आयतस्य क्षेत्रफलं = दीर्घता X वैशाल्यम्

अतः वैशाल्यं = $\frac{\text{क्षेत्रफलम्}}{\text{दीर्घता}} = \frac{36}{9}$ से.मी. = 4 से.मी.

अतः आयताकारस्य स्थूलपत्रस्य वैशाल्यं 4 से.मी. अस्ति ।

उदाहरणम् 16 : बोबः 3 मी वैशाल्यस्य अपि च 4 मी दीर्घतायाः एकस्मिन् प्रकोष्ठे वर्गाकार-स्निग्धप्रस्तरं स्थापयितुम् इच्छति । यदि प्रत्येकं वर्गाकार-स्निग्धप्रस्तरस्य भुजः 0.5 मी स्यात् तर्हि प्रकोष्ठस्य कुट्टिमस्य आच्छादनाय कियन्तः स्निग्धप्रस्तराः अपेक्षिताः भवन्ति ?

समाधानम् : प्रकोष्ठे युज्यमानानां सर्वेषां स्निग्धप्रस्तराणां सम्पूर्णं क्षेत्रफलं, कुट्टिमस्य क्षेत्रफलेन समानं भवति ।

प्रकोष्ठस्य दीर्घता = 4 मी.

प्रकोष्ठस्य वैशाल्यम् = 3 मी.

कुट्टिमस्य क्षेत्रफलम् = दीर्घता X वैशाल्यम्

= 4 मी. X 3 मी.

= 12 वर्ग-मी.

एकस्य वर्गाकार-स्निग्धप्रस्तरस्य क्षेत्रफलं = दीर्घता X दीर्घता

= 0.5 मी X 0.5 मी

= 0.25 वर्ग-मी

आहत्य आवश्यकानां स्निग्धप्रस्तराणां सङ्ख्या

$$= \frac{\text{कुट्टिमस्य क्षेत्रफलम्}}{\text{एकस्य स्निग्धप्रस्तरस्य क्षेत्रफलम्}}$$

$$= \frac{12}{0.25} = \frac{1200}{25} = 48 \text{ स्निग्धप्रस्तराः}$$

उदाहरणम् 17 : 1 मी 25 से.मी. वैशाल्यस्य अपि च 2 मी. दीर्घतायाः वस्त्रस्य क्षेत्रफलं वर्गमीटर्-माने जानन्तु ।

समाधानम् : वस्त्रस्य दीर्घता = 2 मी.

वस्त्रस्य वैशाल्यम् = 1 मी 25 से.मी. = 1 मी + 0.25 मी. = 1.25 मी.

(यतो हि 25 से.मी. = 0.25 मी.)

वस्त्रस्य क्षेत्रफलम् = वस्त्रस्य दीर्घता X वस्त्रस्य वैशाल्यम्

= 2 मी X 1.25 मी. = 2.50 वर्ग-मी.

अभ्यासः 10.3

1. तेषाम् आयतानां क्षेत्रफलं जानन्तु येषां भुजानां मापः अधोदत्तः वर्तते ।
   (a) 3 सेमी अपि च 4 से.मी. (b) 12 मी अपि च 21 मी.
   (c) 2 किमी अपि च 3 कि.मी. (d) 2 मी अपि च 70 से.मी.
2. तेषां वर्गाणां क्षेत्रफलं जानन्तु येषां भुजाः अधोलिखिताः वर्तन्ते ।
   (a) 10 से.मी . (b) 14 सेमी (c) 5 मी
3. त्रयाणाम् आयतानां भुजाः अधोलिखिताः सन्ति ।
   (a) 9 मी अपि च 6 मी (b) 3 मी अपि च 17 मी (c) 4 मी अपि च 14 मी

एतेषु कस्य क्षेत्रफलम् अधिकतमं वर्तते अपि च कस्य न्यूनतमम् अस्ति ?

4. 50 मी. दीर्घतायाः एकस्य आयताकार-उद्यानस्य क्षेत्रफलं 300 वर्ग.मीटर् अस्ति । उद्यानस्य वैशाल्यं जानन्तु ।

5. 500 मी. दीर्घतायाः अपि च 200 मी वैशाल्यस्य एकस्य आयताकार-भूखण्डस्य उपरि, प्रति 100 वर्गमीटर् इत्यस्य कृते 8 रू इति मानेन स्निग्धप्रस्तरं योजयितुं कियान् व्ययः भविष्यति ?

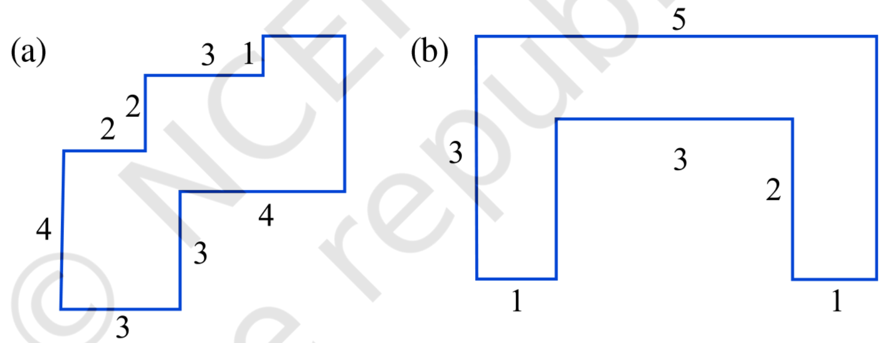
6. एकस्याः उत्पीठिकायाः उपरितनतलस्य मापः 2 मी 25 सेमी X 1 मी 50 सेमी अस्ति । उत्पीठिकायाः क्षेत्रफलं वर्गमीटर्-मानेन जानन्तु ।

7. एकस्य प्रकोष्ठस्य दीर्घता 4 मी 25 से.मी. अपि च वैशाल्यं 3 मी 65 सेमी अस्ति । प्रकोष्ठस्य कुट्टिमम् आच्छादयितुं कियद्वर्ग-मीटर् स्थूलकटः अपेक्षितः ?

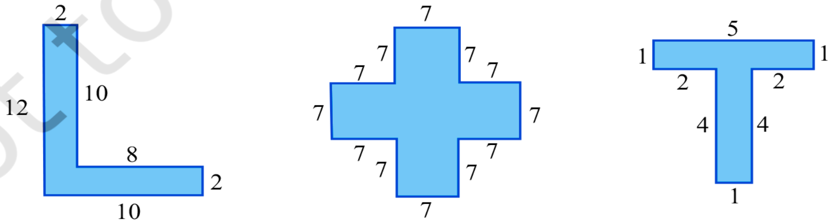
8. एकस्य कुट्टिमस्य दीर्घता 5 मी तथा वैशाल्यं 4 मी अस्ति । 3 मी भुजयुक्तः एकः स्थूलकटः कुट्टिमस्योपरि प्रसारितः वर्तते । कुट्टिमस्य तस्य भागस्य क्षेत्रफलं जानन्तु यस्योपरि स्थूलकटः प्रसारितः नास्ति ।

9. 5 मी दीर्घतायाः अपि च 4 मी. वैशाल्यस्य एकस्य आयताकार-भूखण्डस्य उपरि 1 मी भुजयुक्तः वर्गाकारः पुष्पाणां केदारः निर्मितः अस्ति । भूखण्डस्य शिष्टभागस्य क्षेत्रफलं जानन्तु ।

10. अधोलिखिताकृतीन् आयतेषु त्रोटयन्तु । एतेषां क्षेत्रफलं जानन्तु । (भुजानां मापः सेमी इत्यस्मिन् दत्तः अस्ति ।)



11. अधोलिखिताकृतयः आयतेषु विभाजयन्तु अपि च प्रत्येकं आकृतेः क्षेत्रफलं जानन्तु । (भुजानां मापः सेमी इत्यस्मिन् दत्तः अस्ति ।)



(a) (b) (c)

12. एकस्य स्निग्धप्रस्तारस्य मापः 5 सेमी X 12 सेमी अस्ति । एकं क्षेत्रं पूर्णतया आच्छादयितुं तादृशानां कति स्निग्धप्रस्तराणाम् आवश्यकता भवति ? यदि तस्य दीर्घता अपि च वैशाल्यं क्रमशः–

(a) 144 सेमी अपि च 100 सेमी अस्ति ।

(b) 70 सेमी अपि च 36 सेमी अस्ति ।

एकम् आह्वानम्

1 सेमी वर्गाङ्कितकागदस्य उपरि भवद्भिः यावन्तः आयताः निर्मातुं शक्यन्ते तावतः आयतान् निर्मान्तु, यैः आयतस्य क्षेत्रफलं 16 वर्ग-सेमी भवेत्। (केवलं पूर्णसङ्ख्यायाः दीर्घतायाःोपरि एव विचारः कर्तव्यः।)

(a) कस्य आयतस्य क्षेत्रफलम् अधिकतमम् अस्ति ?

(b) कस्य आयतस्य क्षेत्रफलं न्यूनतमम् अस्ति ?

यदि भवन्तः एतादृश-आयतं स्वीकुर्वन्तु यस्य क्षेत्रफलं 24 वर्ग-सेमी भवेत्, तर्हि भवताम् उत्तराणि कानि भविष्यन्ति ?

दत्तक्षेत्रफलस्य कृते, किम् अधिकतमपरिमापस्य आयतस्य आकारं वक्तुं शक्नुमः ? किं न्यूनतम-आकारं वक्तुं शक्नुमः ? उदाहरणं यच्छन्तु अपि च कारणं वदन्तु।

वयं कस्मिन् विषये चर्चां कृतवन्तः ?

1. परिमापः एकं तादृशं दूरम् अस्ति यः रेखाखण्डेन सहैव चलित्वा एकां पिहिताकृतिं परितः पूर्णभ्रमणं करोति।
2. (a) आयतस्य परिमापः = 2 X (दीर्घता + वैशाल्यम्)
   (b) वर्गस्य परिमापः = 4 X एकस्य भुजस्य दीर्घता
   (c) समबाहुत्रिभुजस्य परिमापः = 3 X एकस्य भुजस्य दीर्घता
3. एतादृश्यः आकृतयः यासां सर्वाः भुजाः अपि च कोणाः समानाः स्युः ताः पिहित-समाकृतयः इत्युच्यन्ते।
4. पिहिताकृतिभिः आवृततलस्य परिमाणं तासां क्षेत्रफलम् इति कथ्यते।
5. वर्गाङ्कितकागदस्य प्रयोगपुरस्सरं कस्याः अपि आकृतेः क्षेत्रफलं ज्ञातुं अधोलिखित –तत्त्वानि आत्मसात्क्रियन्ते
   (a) येषां वर्गाणाम् अर्धादपि न्यूनभागाः आकृत्या आवृताः सन्ति तान् त्यजन्तु।
   (b) यदि वर्गाणाम् अर्धादपि अधिकभागाः आकृत्या आवृताः भवन्ति तान् एकेन पूर्णवर्गरूपेण एव स्वीकुर्वन्तु।
   (c) यदि कस्यापि वर्गस्य अर्धभागः एव आकृत्या आवृतः अस्ति तर्हि तस्य क्षेत्रफलं $\frac{1}{2}$ वर्ग-घटकरूपेण स्वीकुर्वन्तु।
6. (a) आयतस्य क्षेत्रफलम् = दीर्घता X वैशाल्यम्
   (b) वर्गस्य क्षेत्रफलम् = भुजः X भुजः